Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 741–746

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Fonctions constructibles exponentielles, transformation de Fourier motivique et principe de transfert

Raf Cluckers [1], François Loeser

École normale supérieure, département de mathématiques et applications, UMR 8553 du CNRS, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

Reçu le 9 septembre 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 11 novembre 2005

Présenté par Gérard Laumon

Résumé

Nous définissons des espaces de fonctions constructibles exponentielles dans le cadre motivique pour lesquels nous construisons des foncteurs d'image directe dans le cas absolu et relatif. Ceci nous permet de définir une transformation de Fourier motivique pour laquelle nous obtenons des théorèmes d'inversion. Nous définissons également des espaces de Schwartz–Bruhat motiviques sur lesquels la transformation de Fourier motivique induit un isomorphisme. Nos intégrales motiviques se spécialisent sur des intégrales non archimédiennes. On donne un principe général de transfert comparant les identités entre fonctions définies par des intégrales sur des corps locaux de caractéristique zéro ou positive ayant même corps résiduel. Les détails des constructions et des preuves seront donnés ailleurs. ***Pour citer cet article : R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Constructible exponential functions, motivic Fourier transformation and transfer principle. We introduce spaces of exponential constructible functions in the motivic setting for which we construct direct image functors in the absolute and relative cases. This allows us to define a motivic Fourier transformation for which we get various inversion statements. We define also motivic Schwartz–Bruhat spaces on which motivic Fourier transformation induces an isomorphism. Our motivic integrals specialize to non-Archimedian integrals. We give a general transfer principle comparing identities between functions defined by integrals over local fields of characteristic zero, resp. positive, having the same residue field. Details of constructions and proofs will be given elsewhere. ***To cite this article: R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

We keep notations and framework from [1–3]. In particular, we fix a field k of characteristic zero and we consider fields K containing k and the field of Laurent series $K((t))$ endowed with its standard valuation $\mathrm{ord}: K((t))^{\times} \to \mathbf{Z}$. For x in $K((t))$ we set $\overline{\mathrm{ac}}(x) = xt^{-\mathrm{ord}(x)} \bmod t$ if $x \neq 0$ and $\overline{\mathrm{ac}}(0) = 0$, which gives $\overline{\mathrm{ac}}: K((t)) \to K$. We denote by

Adresses e-mail : raf.cluckers@ens.fr (R. Cluckers), francois.loeser@ens.fr (F. Loeser).

[1] Pendant la réalisation de ce projet, le premier auteur était chercheur postdoctoral du Fonds de Recherche Scientifique – Flandres (Belgique) et il a bénéficié de la bourse Marie Curie de la Commission Européenne HPMF-CT 2005-007121.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.10.008

Def_k the category of definable k-subassignments in the Denef–Pas language $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$. For every object Z we defined in loc. cit. categories Def_Z and RDef_Z consisting of definable subassignments over Z.

Let Z be in Def_k. We consider the category $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ whose objects are triples $(Y \to Z, \xi, g)$ with Y in RDef_Z and $\xi : Y \to h[0,1,0]$ and $g : Y \to h[1,0,0]$ morphisms in Def_k. A morphism $(Y' \to Z, \xi', g') \to (Y \to Z, \xi, g)$ in $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ is a morphism $h : Y' \to Y$ in Def_Z such that $\xi' = \xi \circ h$ and $g' = g \circ h$. The functor sending Y in RDef_Z to $(Y, 0, 0)$, with 0 denoting the constant morphism with value 0 in $h[0,1,0]$, resp. $h[1,0,0]$ being fully faithful, we may consider RDef_Z as a full subcategory of $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$. We shall also consider the intermediate full subcategory $\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{e}}$ consisting of objects $(Y, \xi, 0)$ with $\xi : Y \to h[0,1,0]$ a morphism in Def_k. To the category $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ one assigns a Grothendieck ring $K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\exp})$ defined as follows. As an Abelian group it is the quotient of the free Abelian group over symbols $[Y \to Z, \xi, g]$ with $(Y \to Z, \xi, g)$ in $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ by the following four relations

$$[Y \to Z, \xi, g] = [Y' \to Z, \xi', g'] \tag{1}$$

for $(Y \to Z, \xi, g)$ isomorphic to $(Y' \to Z, \xi', g')$,

$$\big[(Y \cup Y') \to Z, \xi, g\big] + \big[(Y \cap Y') \to Z, \xi_{|Y \cap Y'}, g_{|Y \cap Y'}\big] = [Y \to Z, \xi_{|Y}, g_{|Y}] + [Y' \to Z, \xi_{|Y'}, g_{|Y'}] \tag{2}$$

for Y and Y' definable subassignments of some X in RDef_Z and ξ, g defined on $Y \cup Y'$,

$$[Y \to Z, \xi, g + h] = [Y \to Z, \xi + \bar{h}, g] \tag{3}$$

for $h : Y \to h[1,0,0]$ a definable morphism with $\mathrm{ord}(h(y)) \geqslant 0$ for all y in Y and $\bar{h}$ the reduction of h modulo t, and

$$\big[Y[0,1,0] \to Z, \xi + p, g\big] = 0 \tag{4}$$

when $p : Y[0,1,0] \to h[0,1,0]$ is the projection and when $Y[0,1,0] \to Z$, g, and ξ factorize through the projection $Y[0,1,0] \to Y$. Fiber product endows $K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\exp})$ with a ring structure.

Finally, one defines the ring $\mathcal{C}(Z)^{\exp}$ of exponential constructible functions as $\mathcal{C}(Z)^{\exp} := \mathcal{C}(Z) \otimes_{K_0(\mathrm{RDef}_Z)} K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\exp})$. One defines similarly $C(Z)^{\exp}$ and $\mathrm{I}_S C(Z)^{\exp}$. In our main result, Theorem 2.1, we construct direct image morphisms $f_! : \mathrm{I}_S C(Z)^{\exp} \to \mathrm{I}_S C(Y)^{\exp}$ for $f : Z \to Y$ in Def_S, extending those constructed in loc. cit. This is extended to the relative setting in Theorem 2.2. This formalism allows us to define in Section 3 a motivic Fourier transformation for which we can prove several inversion theorems. In particular we define motivic Schwartz–Bruhat spaces on which Fourier transformation induces an automorphism. Our motivic integrals specialize to non-Archimedean integrals. We give a transfer principle comparing identities between functions defined by integrals over local fields of characteristic zero, resp. positive characteristic, having the same residue field.

1. Fonctions constructibles exponentielles

1.1. *Anneaux de Grothendieck exponentiels*

On reprend le cadre et les notations des notes [1] et [2] et de l'article [3]. En particulier on fixe un corps k de caractéristique zéro et on considère des corps K contenant k ainsi que le corps des séries de Laurent $K((t))$ muni de la valuation naturelle $\mathrm{ord} : K((t))^\times \to \mathbf{Z}$. Pour x dans $K((t))$ on pose $\overline{\mathrm{ac}}(x) = x t^{-\mathrm{ord}(x)} \bmod t$ si $x \neq 0$ et $\overline{\mathrm{ac}}(0) = 0$, ce qui donne $\overline{\mathrm{ac}} : K((t)) \to K$. On note Def_k la catégorie des k-sous-assignements définissables dans le langage de Denef–Pas $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$. Pour chaque objet Z on a défini dans loc. cit. des catégories Def_Z et RDef_Z formées de sous-assignements définissables au-dessus de Z.

On considère maintenant la catégorie $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ dont les objets sont les triplets $(Y \to Z, \xi, g)$ avec Y dans RDef_Z, $\xi : Y \to h[0,1,0]$ et $g : Y \to h[1,0,0]$ des morphismes dans Def_k. Un morphisme $(Y' \to Z, \xi', g') \to (Y \to Z, \xi, g)$ dans $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ est un morphisme $h : Y' \to Y$ dans Def_Z tel que $\xi' = \xi \circ h$ et $g' = g \circ h$. Le foncteur associant à Y de RDef_Z l'objet $(Y, 0, 0)$ de $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$, avec 0 le morphisme de valeur constante 0 dans $h[0,1,0]$, resp. $h[1,0,0]$, étant pleinement fidèle, on peut considérer RDef_Z comme une sous-catégorie pleine de $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$. On associe à la catégorie $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ un anneau de Grothendieck $K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\exp})$ défini de la façon suivante. Comme groupe abélien c'est le quotient du groupe abélien libre sur les symboles $[Y \to Z, \xi, g]$ pour $(Y \to Z, \xi, g)$ dans $\mathrm{RDef}_Z^{\exp}$ par les quatre relations suivantes :

$$[Y \to Z, \xi, g] = [Y' \to Z, \xi', g'] \tag{1}$$

si $(Y \to Z, \xi, g)$ est isomorphe à $(Y' \to Z, \xi', g')$,

$$\big[(Y\cup Y')\to Z,\xi,g\big]+\big[(Y\cap Y')\to Z,\xi_{|Y\cap Y'},g_{|Y\cap Y'}\big]=[Y\to Z,\xi_{|Y},g_{|Y}]+[Y'\to Z,\xi_{|Y'},g_{|Y'}] \tag{2}$$

si Y et Y' sont des sous-assignements définissables d'un même X de RDef_Z et ξ, g sont définis sur $Y\cup Y'$,

$$[Y\to Z,\xi,g+h]=[Y\to Z,\xi+\bar{h},g] \tag{3}$$

pour $h:Y\to h[1,0,0]$ un morphisme définissable tel que $\mathrm{ord}(h(y))\geqslant 0$ pour tout y dans Y et $\bar{h}$ la réduction de h modulo t, et

$$\big[Y[0,1,0]\to Z,\xi+p,g\big]=0 \tag{4}$$

avec $p:Y[0,1,0]\to h[0,1,0]$ la projection et $Y[0,1,0]\to Z$, g, et ξ qui se factorisent à travers la projection $Y[0,1,0]\to Y$.

On munit $K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$ d'une structure d'anneau en posant $[Y\to Z,\xi,g]\cdot[Y'\to Z,\xi',g']=[Y\otimes_Z Y'\to Z,\xi\circ p_Y+\xi'\circ p_{Y'},g\circ p_Y+g'\circ p_{Y'}]$, avec $Y\otimes_Z Y'$ le produit fibré de Y et de Y', p_Y la projection sur Y, et $p_{Y'}$ la projection sur Y'.

On écrit $\mathbf{e}^{\xi}E(g)[Y\to Z]$ pour $[Y\to Z,\xi,g]$. On abrège $\mathbf{e}^0E(g)[Y\to Z]$, resp. $\mathbf{e}^{\xi}E(0)[Y\to Z]$, et $\mathbf{e}^0E(0)[Y\to Z]$, en $E(g)[Y\to Z]$, resp. $\mathbf{e}^{\xi}[Y\to Z]$, et $[Y\to Z]$. De même on écrit $\mathbf{e}^{\xi}E(g)$ pour $\mathbf{e}^{\xi}E(g)[Z\to Z]$, $E(g)$ pour $\mathbf{e}^0E(g)[Z\to Z]$ et $\mathbf{e}^{\xi}$ pour $\mathbf{e}^{\xi}E(0)[Z\to Z]$. L'élément $[Z\to Z]$ est l'unité multiplicative de $K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$. On a une injection canonique $K_0(\mathrm{RDef}_Z)\to K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$ envoyant $[Y\to Z]$ sur $[Y\to Z]$. Pour $f:Z\to Z'$ dans Def_k, le produit fibré induit un morphisme canonique $f^*:K_0(\mathrm{RDef}_{Z'}^{\mathrm{exp}})\to K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$. Si f est un morphisme dans $\mathrm{RDef}_{Z'}$, la composition avec f induit un morphisme $f_!:K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})\to K_0(\mathrm{RDef}_{Z'}^{\mathrm{exp}})$.

1.2. Fonctions constructibles exponentielles

Pour Z dans Def_k on définit l'anneau $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$ des fonctions constructibles exponentielles par $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}:=\mathcal{C}(Z)\otimes_{K_0(\mathrm{RDef}_Z)}K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$. Notons que l'élément $E(\mathrm{id})$ de $\mathcal{C}(h[1,0,0])^{\mathrm{exp}}$ peut être vu comme un caractère additif sur le corps valué, non trivial par la relation (3). De même, l'élément $\mathbf{e}^{\mathrm{id}}$ de $\mathcal{C}(h[0,1,0])^{\mathrm{exp}}$ peut être vu comme un caractère additif du corps résiduel, non trivial par la relation (4). Pour tout $d\geqslant 0$ on définit $\mathcal{C}^{\leqslant d}(Z)^{\mathrm{exp}}$ comme l'idéal de $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$ engendré par les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{Z'}$ des sous-assignements définissables $Z'\subset Z$ de dimension $\leqslant d$. On pose $C(Z)^{\mathrm{exp}}:=\bigoplus_d C^d(Z)^{\mathrm{exp}}$ avec $C^d(Z)^{\mathrm{exp}}:=\mathcal{C}^{\leqslant d}(Z)^{\mathrm{exp}}/\mathcal{C}^{\leqslant d-1}(Z)^{\mathrm{exp}}$. C'est un groupe abélien gradué et un $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$-module. Les éléments de $C(Z)^{\mathrm{exp}}$ sont les fonctions constructibles exponentielles. Pour S dans Def_k et Z dans Def_S on définit le groupe $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$ des fonctions constructibles exponentielles S-intégrables comme $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}:=\mathrm{I}_S C(Z)\otimes_{K_0(\mathrm{RDef}_Z)}K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})$. C'est un sous-groupe gradué de $C(Z)^{\mathrm{exp}}$. On vérifie que les morphismes naturels $\mathcal{C}(Z)\to\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$, $\mathcal{C}^{\leqslant d}(Z)\to\mathcal{C}^{\leqslant d}(Z)^{\mathrm{exp}}$, $C(Z)\to C(Z)^{\mathrm{exp}}$ et $\mathrm{I}_S C(Z)\to\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$ sont injectifs.

1.3. Opérations naturelles

Soit $f:Z\to Z'$ un morphisme dans Def_k. Les morphismes f^* sur $K_0(\mathrm{RDef}_{Z'}^{\mathrm{exp}})$ et sur $\mathcal{C}(Z')$ étant compatibles, on en déduit par produit tensoriel un morphisme naturel $f^*:\mathcal{C}(Z')^{\mathrm{exp}}\to\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$. Soit Y dans Def_k et soit Z un sous-assignement définissable de $Y[0,r,0]$, pour un $r\geqslant 0$. Soit $f:Z\to Y$ le morphisme induit par la projection. Le morphisme $f_!:K_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}})\to K_0(\mathrm{RDef}_Y^{\mathrm{exp}})$ induit un morphisme d'anneaux $f_!:\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}\to\mathcal{C}(Y)^{\mathrm{exp}}$, ainsi qu'un morphisme de groupes $f_!:C(Z)^{\mathrm{exp}}\to C(Y)^{\mathrm{exp}}$. Si Y est dans Def_S, le morphisme $f_!$ induit un morphisme $f_!:\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}\to\mathrm{I}_S C(Y)^{\mathrm{exp}}$.

2. L'énoncé principal

Théorème 2.1. *Soit S dans* Def_k. *Il existe un unique foncteur de la catégorie* Def_S *vers celle des groupes abéliens, associant à un objet Z le groupe* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$, *à un morphisme $f:Z\to Y$ in* Def_S *le morphisme* $f_!:\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}\to\mathrm{I}_S C(Y)^{\mathrm{exp}}$ *et satisfaisant les axiomes suivants*

A1 (Compatibilité) : *Pour tout morphisme $f:Z\to Y$ dans* Def_S, *le morphisme* $f_!:\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}\to\mathrm{I}_S C(Y)^{\mathrm{exp}}$ *est compatible avec les inclusions de groupes* $\mathrm{I}_S C(Z)\to\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$ *et* $\mathrm{I}_S C(Y)\to\mathrm{I}_S C(Y)^{\mathrm{exp}}$ *et le morphisme* $f_!:\mathrm{I}_S C(Z)\to\mathrm{I}_S C(Y)$ *construit dans* [3].

A2 (Réunion disjointe) : *Considérons Z et Y dans* Def_S *et supposons que Z, resp. Y, est la réunion disjointe de deux sous-assignements définissables Z_1 et Z_2, resp. Y_1 et Y_2, de Z, resp. Y. Pour tout morphisme $f: Z \to Y$ de* Def_S, *avec $f(Z_i) \subset Y_i$ pour $i = 1, 2$, de restriction $f_i : Z_i \to Y_i$, on a $f_! = f_{1!} \oplus f_{2!}$, modulo l'isomorphisme* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}} \simeq \mathrm{I}_S C(Z_1)^{\mathrm{exp}} \oplus \mathrm{I}_S C(Z_2)^{\mathrm{exp}}$ *et celui correspondant pour Y.*

A3 (Formule de projection) : *Pour tout morphisme $f: Z \to Y$ dans* Def_S *et tout α dans $\mathcal{C}(Y)^{\mathrm{exp}}$ et β dans* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$, *si $f^*(\alpha)\beta$ est dans* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$, *alors $f_!(f^*(\alpha)\beta) = \alpha f_!(\beta)$.*

A4 (Projection le long des variables résiduelles) : *Supposons que f est la projection $f: Z = Y[0, n, 0] \to Y$ pour Y dans* Def_S *et que φ est dans* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$. *Alors, $f_!(\varphi)$ est donné par la construction de 1.3.*

A5 (Boules relatives de grand volume) : *Considérons Y dans* Def_S *et des morphismes définissables $\alpha: Y \to \mathbf{Z}$ et $\xi: Y \to h_{\mathbf{G}_{m,k}}$, avec $\mathbf{G}_{m,k}$ le groupe multiplicatif $\mathbf{A}^1_k \setminus \{0\}$. Supposons que $[\mathbf{1}_Z]$ est dans* $\mathrm{I}_S C(Z)^{\mathrm{exp}}$ *et que Z est le sous-assignement définissable de $Y[1, 0, 0]$ défini par* $\mathrm{ord}(z) = \alpha(y)$ *et* $\overline{\mathrm{ac}}(z) = \xi(y)$, *et que $f: Z \to Y$ est le morphisme induit par la projection $Y[1, 0, 0] \to Y$. Si, de plus, $\alpha(y) < 0$ pour tout y dans Y, alors $f_!(E(z)[\mathbf{1}_Z]) = 0$.*

Principe de la démonstration. Comme pour la preuve du théorème principal de [3], le point-clé est la construction de $f_!$ lorsque f est une projection $Y[r, 0, 0] \to Y$. Quand $r = 1$, on utilise le théorème de décomposition cellulaire de Denef–Pas, cf. [10] et [3], pour construire $f_!$ et on vérifie que la construction est indépendante de la décomposition cellulaire considérée. Pour déduire le cas $r > 1$ du cas $r = 1$, on établit une forme convenable du théorème de Fubini ainsi qu'un théorème de changement de variables pour $r = 1$.

Le Théorème 2.1 se généralise au cas relatif de la façon suivante. On fixe Λ dans Def_k qui joue le rôle d'un espace de paramètres. Pour Z dans Def_Λ, on considère, de façon analogue à [2], l'idéal $\mathcal{C}^{\leqslant d}(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}}$ de $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{Z'}$ avec Z' sous-assignement définissable de Z tel que toutes les fibres de $Z' \to \Lambda$ soient de dimension $\leqslant d$. On pose $C(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}} = \bigoplus_d C^d(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}}$ avec $C^d(Z \to \Lambda) := \mathcal{C}^{\leqslant d}(Z \to \Lambda)/\mathcal{C}^{\leqslant d-1}(Z \to \Lambda)$. Ce groupe abélien gradué s'identifie naturellement à $C(Z \to \Lambda) \otimes_{K_0(\mathrm{RDef}_Z)} K_0(\mathrm{RDef}^{\mathrm{exp}}_Z)$. Pour $Z \to S$ un morphisme dans Def_Λ, on pose $\mathrm{I}_S C(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}} := \mathrm{I}_S C(Z \to \Lambda) \otimes_{K_0(\mathrm{RDef}_Z)} K_0(\mathrm{RDef}^{\mathrm{exp}}_Z)$.

Théorème 2.2. *Soit Λ dans* Def_k *et soit S dans* Def_Λ. *Il existe un unique foncteur de* Def_S *dans la catégorie des groupes abéliens, associant à tout morphisme $f: Z \to Y$ dans* Def_S *un morphisme* $f_{!\Lambda}: \mathrm{I}_S C(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}} \to \mathrm{I}_S C(Y \to \Lambda)^{\mathrm{exp}}$ *vérifiant les analogues de* (A1)–(A5) *obtenus en remplaçant $C(\_)$ par $C(\_ \to \Lambda)$.*

Soit $p: Z \to \Lambda$ un morphisme dans Def_k, dont on suppose que toutes les fibres sont de dimension d. On note $\mathcal{I}_\Lambda(Z)^{\mathrm{exp}}$, ou encore $\mathcal{I}_p(Z)^{\mathrm{exp}}$, le $\mathcal{C}(\Lambda)^{\mathrm{exp}}$-module des fonctions φ in $\mathcal{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$ dont la classe $[\varphi]$ dans $C^d(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}}$ est intégrable rel. Λ, i.e. est dans $\mathrm{I}_\Lambda C(Z \to \Lambda)^{\mathrm{exp}}$. On écrira $\mu_\Lambda(\varphi)$ ou $\mu_p(\varphi)$ pour $p_{!\Lambda}([\varphi])$.

3. Transformation de Fourier

3.1. Transformation de Fourier sur les variables valuées

On fixe Λ dans Def_k et un entier $d \geqslant 0$. On considère le sous-assignement définissable $\Lambda[2d, 0, 0]$, les d premières coordonnés sur les variables valuées étant notées $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et les d dernières $y = (y_1, \ldots, y_d)$, et on note $p_1: \Lambda[2d, 0, 0] \to \Lambda[d, 0, 0]$ et $p_2: \Lambda[2d, 0, 0] \to \Lambda[d, 0, 0]$ la projection sur les variables x et y respectivement. On considère la fonction $E(xy) := E(\sum_{1 \leqslant i \leqslant d} x_i y_i)$ dans $\mathcal{C}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$. Si φ est une fonction dans $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$, la classe $[E(xy)p_2^*(\varphi)]$ de $E(xy)p_2^*(\varphi)$ dans $C^d(p_1: \Lambda[2d, 0, 0] \to \Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$ est intégrable rel. p_1, ce qui permet de définir la transformation de Fourier $\mathfrak{F}: \mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}} \to \mathcal{C}(\Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$ par $\mathfrak{F}(\varphi) := \mu_{p_1}(E(xy)p_2^*(\varphi))$, pour φ dans $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$. L'opérateur $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{C}(\Lambda)^{\mathrm{exp}}$-linéaire.

3.2. Convolution

On note $x + y$ le morphisme $\Lambda[2d, 0, 0] \to \Lambda[d, 0, 0]$ donné par $(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$.

Proposition 3.1. *Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\mathrm{exp}}$.*

(1) *La fonction* $p_1^*(f)p_2^*(g)$ *appartient à* $\mathcal{I}_{x+y}(\Lambda[2d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ *et la fonction* $f*g := \mu_{x+y}(p_1^*(f)p_2^*(g))$ *appartient à* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$.
(2) *Le produit de convolution* $(f,g)\mapsto f*g$ *est* $\mathcal{C}(\Lambda)^{\mathrm{exp}}$*-linéaire et munit* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ *d'un produit associatif et commutatif.*
(3) *On a* $\mathfrak{F}(f*g)=\mathfrak{F}(f)\,\mathfrak{F}(g)$.

Pour φ dans $\mathcal{C}(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ on écrit $\check{\varphi}$ pour $i^*(\varphi)$, avec $i:\Lambda[d,0,0]\to\Lambda[d,0,0]$ le Λ-morphisme envoyant x sur $-x$. Pour $\alpha:\Lambda\to\mathbf{Z}$ définissable, on note φ_α la fonction caractéristique de l'ensemble des $(\lambda,(x_i))$ avec $\mathrm{ord}\, x_i\geqslant\alpha(\lambda)$ pour tout i.

On a l'énoncé général suivant (inversion de Fourier partielle) :

Proposition 3.2. *Soit* φ *une fonction dans* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$*. Pour tout* α *définissable,* $\varphi_\alpha\mathfrak{F}(\varphi)$ *appartient à* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ *et* $\mathfrak{F}(\varphi_\alpha\mathfrak{F}(\varphi))=\mathbf{L}^{-\alpha d}\,\check{\varphi}*\varphi_{-\alpha+1}$.

3.3. Fonctions de Schwartz–Bruhat

On définit l'espace $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ des fonctions de Schwartz–Bruhat sur Λ comme le $\mathcal{C}(\Lambda)^{\mathrm{exp}}$-sous-module de $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ formé des fonctions f telles qu'il existe $\alpha_0:\Lambda\to\mathbf{Z}$ définissable telle que $f\cdot\varphi_\alpha=f$ pour $\alpha\leqslant-\alpha_0$ et $f*\varphi_\alpha=\mathbf{L}^{-\alpha d}f$ pour $\alpha\geqslant\alpha_0$.

On a l'énoncé d'inversion suivant pour les fonctions de Schwartz–Bruhat :

Théorème 3.3. *La transformation de Fourier induit un isomorphisme* $\mathfrak{F}:\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}\simeq\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$ *tel que, pour toute fonction* φ *dans* $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$, $(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{F})(\varphi)=\mathbf{L}^{-d}\check{\varphi}$.

On en déduit l'énoncé d'inversion général suivant pour les fonctions intégrables à transformée de Fourier intégrable :

Théorème 3.4. *Soit* φ *dans* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$*. On suppose que* $\mathfrak{F}(\varphi)$ *est aussi dans* $\mathcal{I}_\Lambda(\Lambda[d,0,0])^{\mathrm{exp}}$*. Alors les fonctions* $(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{F})(\varphi)$ *et* $\mathbf{L}^{-d}\check{\varphi}$ *ont même classe dans* $C^d(\Lambda[d,0,0]\to\Lambda)$.

4. Spécialisation et transfert

4.1. Spécialisation

On suppose désormais que k est un corps de nombres d'anneaux des entiers $\mathcal{O}$. On note $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ l'ensemble des complétions p-adiques de toutes les extensions finies de k et $\mathcal{B}_\mathcal{O}$ l'ensemble des corps locaux de caractéristique >0 qui sont des $\mathcal{O}$-modules. Pour K dans $\mathcal{C}_\mathcal{O}:=\mathcal{A}_\mathcal{O}\cup\mathcal{B}_\mathcal{O}$, on désigne par R_K son anneau de valuation, M_K l'idéal maximal, k_K le corps résiduel, q_K le cardinal de k_K, et ϖ_K une uniformisante de R_K. Il existe un unique morphisme $\overline{\mathrm{ac}}:K^\times\to k_K^\times$ prolongeant $R_K^\times\to k_K^\times$ et envoyant ϖ_K sur 1, que l'on étend par $\overline{\mathrm{ac}}(0)=0$. On note $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des caractères additifs $\psi:K\to\mathbf{C}^\times$ tels que $\psi(x)=\exp((2\pi i/p)\mathrm{Tr}_{k_K}(\bar{x}))$ pour $x\in R_K$, avec p la caractéristique de k_K, Tr_{k_K} la trace de k_K relativement à son sous-corps premier et $\bar{x}$ la classe de x dans k_K. Pour $N>0$, on définit $\mathcal{A}_{\mathcal{O},N}$ comme l'ensemble des corps K dans $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ tels que k_K soit de caractéristique $>N$, et de même pour $\mathcal{B}_{\mathcal{O},N}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$.

Pour pouvoir interpréter nos formules dans les corps de $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, on restreint le langage $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ au sous-langage $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ avec coefficients dans k pour la sorte résiduelle et dans $\mathcal{O}[\![t]\!]$ pour la sorte valuée. On note $\mathrm{Def}(\mathcal{L}_\mathcal{O})$ la sous-catégorie de Def_k des objets définissables dans le langage $\mathcal{L}_\mathcal{O}$. On procède de même pour les fonctions, etc., ainsi, pour S dans $\mathrm{Def}(\mathcal{L}_\mathcal{O})$, on note $\mathcal{C}(S,\mathcal{L}_\mathcal{O})^{\mathrm{exp}}$ l'anneau des fonctions constructibles exponentielles définissables dans $\mathcal{L}_\mathcal{O}$. On voit K de $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ comme une $\mathcal{O}[\![t]\!]$-algèbre via le morphisme $\lambda_{\mathcal{O},K}:\sum_{i\in\mathbf{N}}a_it^i\mapsto\sum_{i\in\mathbf{N}}a_i\varpi_K^i$, ainsi, si on interprète a dans $\mathcal{O}[\![t]\!]$ par $\lambda_{\mathcal{O},K}(a)$, toute $\mathcal{L}_\mathcal{O}$-formule φ definit pour $K\in\mathcal{C}_\mathcal{O}$ un sous-ensemble définissable φ_K d'un $K^m\times k_K^n\times\mathbf{Z}^r$. Il résulte de résultats d'Ax, Kochen et Eršov que si deux $\mathcal{L}_\mathcal{O}$-formules φ et φ' définissent le même sous-assignement X de $h[m,n,r]$, alors $\varphi_K=\varphi'_K$ pour tout K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ avec N assez grand. Avec abus de notation on note X_K l'ensemble défini par φ_K pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ avec $N\gg0$. De même, tout morphisme $\mathcal{L}_\mathcal{O}$-definissable $f:X\to Y$ se spécialise en $f_K:X_K\to Y_K$ pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ avec $N\gg0$. De façon similaire, φ dans $\mathcal{C}(X,\mathcal{L}_\mathcal{O})$ se spécialise en $\varphi_K:X_K\to\mathbf{Q}$ pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ avec $N\gg0$. En effet considérons φ dans $K_0(\mathrm{RDef}_X(\mathcal{L}_\mathcal{O}))$ de la forme

$[\pi : W \to X]$ avec W dans $\mathrm{RDef}_X(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$. Pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$, avec $N \gg 0$, on dispose de $\pi_K : W_K \to X_K$ et on définit $\varphi_K : X_K \to \mathbf{Q}$ par : $x \mapsto \mathrm{card}(\pi_K^{-1}(x))$. Pour φ dans $\mathcal{P}(X)$, on spécialise $\mathbf{L}$ en q_K et $\alpha : X \to \mathbf{Z}$ en $\alpha_K : X_K \to \mathbf{Z}$. Par produit tensoriel on en déduit la spécialisation $\varphi \mapsto \varphi_K$ pour φ dans $\mathcal{C}(X, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})$. Pour le cas exponentiel, soit φ dans $K_0(\mathrm{RDef}_X(\mathcal{L}_{\mathcal{O}}))^{\exp}$ de la forme $[W, g, \xi]$. Pour ψ_K dans $\mathcal{D}_K$, on spécialise φ en $\varphi_{K,\psi_K} : X_K \to \mathbf{C}$ donnée par $x \mapsto \sum_{y \in \pi_K^{-1}(x)} \psi_K(g_K(y)) \exp((2\pi \mathrm{i}/p) \mathrm{Tr}_{k_K}(\xi_K(y)))$ pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ avec $N \gg 0$. Par produit tensoriel on en déduit la spécialisation $\varphi \mapsto \varphi_K$ pour φ dans $\mathcal{C}(X, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$.

Soit K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ et soit A une partie de $K^m \times k_K^n \times \mathbf{Z}^r$. On définit la dimension de A comme la dimension de l'adhérence de Zariski $\bar{A}$ de la projection de A dans $\mathbf{A}_K^m$. Pour $d \geqslant \dim A$, on obtient une mesure μ_d sur A (nulle si $d > \dim A$) par restriction du produit de la mesure d-dimensionnelle canonique sur $\bar{A}(K)$ avec la mesure de comptage sur $k_K^n \times \mathbf{Z}^r$.

Fixons un morphisme $f : S \to \Lambda$ dans $\mathrm{Def}(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$. Considérons ϕ dans $\mathcal{C}^{\leqslant d}(S \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$. On démontre que pour $N \gg 0$, pour K dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$, et ψ_K dans $\mathcal{D}_K$, pour tout λ dans Λ_K, le support de la restriction $\phi_{K,\psi_K,\lambda}$ de ϕ_{K,ψ_K} à $f_K^{-1}(\lambda)$ est de dimension $\leqslant d$ et que de plus si la classe φ de ϕ dans $C^d(S \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$ est relativement intégrable, les $\phi_{K,\psi_K,\lambda}$ sont toutes μ_d-intégrables. On note alors $\mu_{\Lambda_K}(\varphi_{K,\psi_K})$ la fonction sur Λ_K définie par $\lambda \mapsto \mu_d(\phi_{K,\psi_K,\lambda})$, qui ne dépend que de φ pour $N \gg 0$. Cette construction s'étend par linéarité à $\mathrm{I}C(S \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$.

Théorème 4.1 (Principe de spécialisation). *Soit* $f : S \to \Lambda$ *un morphisme dans* $\mathrm{Def}(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$. *Soit* φ *dans* $\mathrm{I}_\Lambda C(S \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$. *Il existe* $N > 0$ *tel que, pour tout* K *dans* $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ *et tout* ψ_K *dans* $\mathcal{D}_K$, $(\mu_\Lambda(\varphi))_{K,\psi_K} = \mu_{\Lambda_K}(\varphi_{K,\psi_K})$.

4.2. Principe de transfert pour les intégrales avec paramètres

Théorème 4.2. *Soit* φ *dans* $\mathcal{C}(\Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$. *Il existe un entier* N *tel que pour tous* K_1, K_2 *dans* $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ *avec* $k_{K_1} \simeq k_{K_2}$, $\varphi_{K_1,\psi_{K_1}} = 0$ *pour tout* $\psi_{K_1} \in \mathcal{D}_{K_1}$ *si et seulement si* $\varphi_{K_2,\psi_{K_2}} = 0$ *pour tout* $\psi_{K_2} \in \mathcal{D}_{K_2}$.

On déduit des Théorèmes 4.1 et 4.2 :

Théorème 4.3 (Principe de transfert pour les intégrales avec paramètres). *Soient* $S \to \Lambda$ *et* $S' \to \Lambda$ *des morphismes dans* $\mathrm{Def}(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$. *Soit* φ *dans* $\mathrm{I}_\Lambda C(S \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$ *et* φ' *dans* $\mathrm{I}_\Lambda C(S' \to \Lambda, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})^{\exp}$. *Il existe un entier* N *tel que pour tous les corps* K_1 *et* K_2 *dans* $\mathcal{C}_{\mathcal{O},N}$ *avec* $k_{K_1} \simeq k_{K_2}$, $\mu_{\Lambda_{K_1}}(\varphi_{K_1,\psi_{K_1}}) = \mu_{\Lambda_{K_1}}(\varphi'_{K_1,\psi_{K_1}})$ *pour tout* $\psi_{K_1} \in \mathcal{D}_{K_1}$ *si et seulement si* $\mu_{\Lambda_{K_2}}(\varphi_{K_2,\psi_{K_2}}) = \mu_{\Lambda_{K_2}}(\varphi'_{K_2,\psi_{K_2}})$ *pour tout* $\psi_{K_2} \in \mathcal{D}_{K_2}$.

En l'absence d'exponentielles une forme du théorème précédent se trouve déjà dans [4]. Il devrait s'appliquer aux intégrales orbitales apparaissant dans différentes formes du Lemme Fondamental. Notons que notre approche permet de s'affranchir de conditions de constance locale, telles celles figurant dans [5]. Rappelons que le Lemme Fondamental pour les groupes unitaires a été démontré par Laumon et Ngô [8] sur les corps de fonctions et que Waldspurger en a déduit le cas des corps p-adiques [11]. D'autre part notre résultat s'applique aux intégrales apparaisssant dans la conjecture de Jacquet–Ye [7], démontrée par Ngô [9] sur les corps de fonctions et par Jacquet [6] en général.

Références

[1] R. Cluckers, F. Loeser, Fonctions constructibles et intégration motivique. I, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 411–416.
[2] R. Cluckers, F. Loeser, Fonctions constructibles et intégration motivique. II, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 487–492.
[3] R. Cluckers, F. Loeser, Constructible motivic functions and motivic integration, math.AG/0410203.
[4] R. Cluckers, F. Loeser, Ax–Kochen–Eršov theorems for p-adic integrals and motivic integration, in: F. Bogomolov, Y. Tschinkel (Eds.), Geometric Methods in Algebra and Number Theory, Birkhäuser, 2005, pp. 109–137.
[5] C. Cunningham, T. Hales, Good orbital integrals, Represent. Theory 8 (2004) 414–457.
[6] H. Jacquet, Kloosterman identities over a quadratic extension, Ann. of Math. 160 (2004) 755–779.
[7] H. Jacquet, Y. Ye, Relative Kloosterman integrals for GL(3), Bull. Soc. Math. France 120 (1992) 263–295.
[8] G. Laumon, B.C. Ngô, Le lemme fondamental pour les groupes unitaires, math.AG/0404454.
[9] B.C. Ngô, Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999) 619–679.
[10] J. Pas, Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions, J. Reine Angew. Math. 399 (1989) 137–172.
[11] J.-L. Waldspurger, Endoscopie et changement de caractéristiques, Preprint, 2004.